Hans Havlicek und Metod Saniga

Kooperationsgruppe ›Endliche projektive Ringgeometrien‹

Die ZiF-Kooperationsgruppe ›Finite projektive Ringgeometrien: Eine Brücke zwischen Quanteninformationstheorie, der Physik Schwarzer Löcher und Quantenchemie‹ sah man von August bis Oktober fast täglich Stunde um Stunde im kleinen Tagungsraum *Bits and Bytes* zusammensitzen. Die Wandtafel füllte sich wieder und wieder mit für den Laien geradezu erschreckenden Formeln, die Diskussionen wurden allenfalls vom gemeinschaftlichen Gang zum Kaffeeautomaten unterbrochen. Die Leiter der Kooperationsgruppe Hans Havlicek (Wien) und Metod Saniga (Tatranská Lomnica) haben sich bereitgefunden, ihr faszinierendes Projekt einmal für Laien zu erklären.

Michel Planat, Metod Saniga, Thomas Honold, Petr Pracna, Andrea Blunck, Hans Havlicek (v. l. n. r.)

Der Titel Ihrer Kooperationsgruppe erschließt sich nicht gerade von selbst. Was ist eine Ringgeometrie, was eine projektive Ringgeometrie und was ist eine endliche projektive Ringgeometrie?

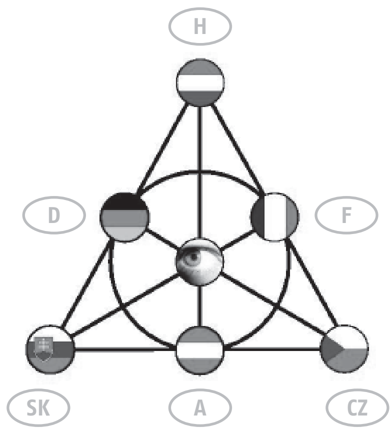
Prof. Havlicek: Fangen wir mit der endlichen Geometrie an: Sie hat ihre Wurzeln in dem, was man heute Unterhaltungsmathematik nennt. Viele Menschen haben Freude an endlichen mathematischen Problemen, man möchte ja irgendwann fertig werden. Sudoku ist ein modernes Beispiel dafür, doch diese Art der Unterhaltung ist viel älter. 1850 etwa tauchte im *The Ladies' and Gentlemen's Diary* folgendes Problem auf: 15 Schülerinnen sollen die Schule sieben Tage lang immer in Dreiergruppen verlassen aber so, dass nie zwei Schülerinnen mehr als einmal in derselben Gruppe sind. Mit Geduld und Einfühlungsvermögen kann man eine Lösung austüfteln. Diese Form der Unterhaltung hat sich längst verselbständigt, heute wissen wir, was an Mathematik hinter solchen Problemen steht. Statt von Schülerinnen spricht man von Punkten und statt von Dreiergruppen von Geraden, die die Punkte verbinden, man betrachtet das Problem in Begriffen der Geometrie. Es gibt also mathematische Strukturen, die wegen der großen strukturellen Ähnlichkeit damit, was man sich gewöhnlich als Geometrie vorstellt, auch als Geometrien gelten. Es gibt aber einen großen Unterschied: In unserem Beispiel geht es nur um 15 Schülerinnen, die klassische Geometrie hingegen arbeitet immer mit einer unendlichen Anzahl von Punkten. Das ist die endliche Geometrie, wir haben hier, jetzt wird's technisch, einen endlichen projektiven Raum.

Was bedeutet hier projektiv?

H: Man lernt in der Schule, parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen. Mathematiker definieren sich das, wie sie es brauchen: das heißt, sie definieren zwei parallele Geraden und einen virtuellen Punkt dazu und schon, na ja ganz so einfach ist es nicht, haben wir einen Punkt, in dem sich die Geraden schneiden. Fernpunkt heißt der in der projektiven Geometrie, Sie kennen das aus der perspektivischen Malerei, wie sie sich in der Renaissance entwickelt hat. Da sieht man, wie die parallelen Geraden in einem Punkt zusammenlaufen.

Der Fluchtpunkt …

H: Ja genau. Woher kommt der Punkt, der ist ja nicht real? Da rettet man sich in der Mathematik und erfindet eben einen virtuellen oder unendlich fernen Punkt dazu. Die projektive Geometrie entstand also bei dem Versuch, dreidimensionale Gegenstände perspektivisch richtig darzustellen: Parallelität durch die Einführung eines neuen Elements auszuschalten: das ist das Wesen der projektiven Geometrie. Herr Pracna, Fellow unserer Kooperationsgruppe, hat dies in einem schönen Bild veranschaulicht:



An Stelle der Punkte sehen Sie die Fahnen der Hauptmitglieder unserer Gruppe: Ungarn, Tschechien, Slowakei, Österreich, Frankreich und Deutschland. In der Mitte sieht man ein Auge, das passt gut zu unserem Thema; man sieht einen Ring, die Iris, und auch ein schwarzes Loch, die Pupille. Das Ganze ist eine Fano-Ebene, benannt nach dem italienischen Mathematiker Gino Fano. Zwischen den Punkten sieht man die Geraden.

Der Kreis in der Mitte ist eine Gerade?

H: Das muss man jetzt so gelten lassen, es geht hier nur um die Beziehungen: wie in dem Problem mit den Schülerinnen werden immer Dreiergruppen herausgehoben. Parallelität gibt es hier nicht.

Also, die endliche Geometrie befasst sich mit endlichen Mengen, die projektive schafft die Parallelität ab, fehlen nur noch die Ringe.

H: Gut, es heißt immer, zwei Punkte werden durch genau eine Gerade miteinander verbunden. Aber wenn ich Sie hier zwei knapp beieinander liegende Punkte mit einem Lineal zehn Mal miteinander verbinden lasse, werden Sie sicher nicht zehn Mal dieselbe Gerade treffen. Wir stoßen hier an die Grenzen unserer Idealisierung. Benachbarte Punkte haben mehrere verbindende Geraden. In der Ringgeometrie werden als Koordinaten Zahlenbereiche zugelassen, die in der Mathematik als Ringe bezeichnet werden. Die genauere Modellierung der Wirklichkeit war zwar Anstoß für diese Sichtweise, heute ist sie nicht mehr anschaulich, aber das ist ja bei vielen Wissenschaften so, man kann die Gedankenwelt nicht 1:1 auf die reale Welt abbilden.

Die Ringgeometrie bringt also zusätzlich das Phänomen der benachbarten Elemente, bei denen die eindeutige Verbindbarkeit zusammenbricht. Was macht die Kooperationsgruppe mit diesem komplexen Werkzeug?

H: Die Ringgeometrie gibt es seit langem. Schon 1916 hat Johannes Hjelmslev damit angefangen, hat die Geometrie von Euklid zur Seite geschoben, hat eine neue Geometrie geschaffen und den Nachbarbegriff mathematisiert. Das alles hat sich als tragfähig erwiesen. Und nun hat sich vor einigen Jahren herausgestellt, dass man überraschenderweise mithilfe dieser Strukturen gewisse Phänomene aus der Physik besser verstehen kann, die dort auftraten. Es ist also lange nicht aufgefallen, dass die Ringgeometrie an ganz anderer Stelle zu tieferen Einsichten führen kann. Da ist zum Beispiel die Frage aus der Quanteninformationstheorie, ob man die Reihenfolge von Prozessen vertauschen kann. Das ist wie beim Kochen: Manchmal ist die Abfolge der Arbeitsschritte egal, manchmal ganz und gar nicht. Es hat sich herausgestellt, dass man diese Phänomene mithilfe des Schaltplans der Ringgeometrie beschreiben kann. Es gibt da zwei Arten von Verbindungen: ausgezeichnete Verbindungen bedeuten, dass man die Reihenfolge der Prozesse vertauschen kann, gewöhnliche Verbindungen, dass man das nicht kann. Wir versuchen also das Wesen der Ringgeometrien in physikalischen Anwendungen wieder zu finden, und wir versuchen, das bestehende mathematische Wissen so aufzubereiten, dass man es auf der anderen Seite, also auf der Seite der Physik, wieder erkennen kann.

Die Kommunikation zwischen den Disziplinen scheitert oft an den Fachsprachen. Man muss aufeinander zugehen, das ist das Spannende daran, aber es ist auch ein bisschen nervig, wenn man feststellt, die Vokabel gibt's bei dem anderen auch, aber er meint etwas anderes damit und deshalb reden wir die ganze Zeit aneinander vorbei.

Ein typisches ZiF-Problem.

H: Ja, wir haben Mathematiker, Physiker und auch einen Chemiker in der Gruppe, der untersucht, ob man mit den Ringgeometrien auch in der Theorie der chemischen Bindung weiterkommt, das steckt aber noch sehr in den Anfängen. Wir arbeiten jetzt seit drei Jahren zusammen, man muss sich erstmal menschlich und fachsprachlich verstehen. Es ist für mich auch faszinierend zu sehen, wie sehr die Mathematik von der Sprache abhängt, man kann ja nicht alles in Formeln ausdrücken, man muss sie dem anderen ja auch erklären können. Dazu braucht man die Sprache. Und dazu braucht man die Zeit, die es hier am ZiF gibt.

Prof. Saniga: Wir haben lange um eine gemeinsame Sprache gerungen, das war sehr spannend, aber auch sehr kompliziert. Es ist ja sogar innerhalb der Mathematik schwierig eine gemeinsame Sprache zu finden. Die spontane Interaktion, wie sie eine solche Gruppe ermöglicht, war da sehr hilfreich und auch nötig.

Und wie hängt die Ringgeometrie mit den schwarzen Löchern zusammen?

H: Das ist sehr interessant: Phänomene aus der Quanteninformationstheorie und aus der Theorie der schwarzen Löcher sind durch die gleiche mathematische Sprache verbunden, nämlich die der Ringgeometrie. Wir haben also eine Art magisches Dreieck: auf der einen Seite die Singularität in der Raumzeit, auf der anderen die Quanteneffekte, die man gerne für den Bau eines Quantencomputers nutzen würde, es aber in der Praxis noch nicht kann. Da spielt die Umkehrbarkeit von Prozessen eine große Rolle. Und aus ungeklärter Ursache ist die Mathematik der Ringgeometrie ein Bindeglied zwischen beiden Theorien, ohne dass man sagen kann, was die Phänomene eigentlich miteinander zu tun haben. Vielleicht gibt es einen tieferen Zusammenhang, aber den sehen die Physiker noch nicht.

S: Zwei unendliche Strukturen sind also über eine endliche Geometrie verknüpft, das scheint ein verbindendes Element zu sein, aber wir stehen noch ganz am Anfang zu verstehen, wie.

Ist Ihre Gruppe also so entstanden, dass die Physiker auf die Mathematiker zugegangen sind?

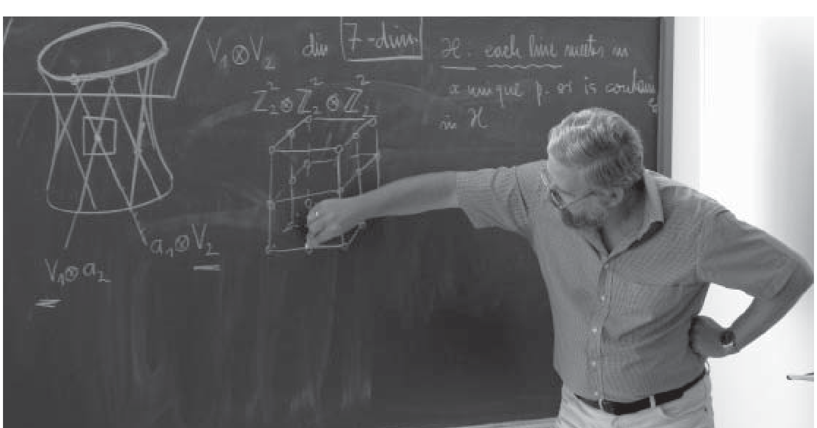
H: Ja, zuerst hat Metod Saniga mir Fragen gestellt, manche konnte ich beantworten, manche Dinge, von denen er mir als Physiker berichtet, kann ich als Mathematiker bis heute nicht einordnen. Wir haben vor drei Jahren begonnen und sind derzeit wohl die Einzigen, die dieses Thema bearbeiten. Wir verstehen uns aber als Keimzelle und hatten in der Gruppe auch viele Gäste, etwa aus England. Es braucht eben Zeit, bis das wahrgenommen wird. Eine solche Arbeitsgruppe ist dafür sehr wichtig, die Originalliteratur ist doch sehr unzugänglich, und Lehrbücher gibt es kaum, also muss man sich persönlich treffen. Deshalb haben wir uns quasi für das Gegenteil einer großen Tagung entschieden: Wenige Teilnehmer, die viel Zeit haben, ihre Sachen vorzutragen und zu diskutieren. Die Ruhe am ZiF, die gute Organisation und dass uns die ganze Bürokratie abgenommen wurde, hat uns dabei sehr geholfen.

Was wäre denn Ihr liebstes Ergebnis?

H: Das Größte wäre natürlich wenn wir einen Beitrag zu dem in der Quanteninformationstheorie seit Jahrzehnten ungelösten Problem der *mutually unbiased bases* leisten könnten, aber das ist vielleicht zu vermessen. Es wäre schon toll, wenn es uns gelingen würde, durch Übersetzen in die Sprache der Ringgeometrien Licht in das Verhältnis von Quanteninformationstheorie und Theorie der schwarzen Löcher zu bringen. Wir arbeiten also an einer Art Wörterbuch. Manche Begriffe kann man schon übersetzen, aber es wäre vermessen zu behaupten, wir schrieben hier das Buch der Bücher. Die babylonische Sprachverwirrung zwischen den Disziplinen etwas zu entwirren, wäre schon eine Leistung. Aber es geht hier nicht nur um ein Vokabelheft, es muss schließlich auch etwas Wirkliches geben, von dem die Übersetzung handelt. Immerhin will die Physik ja die reale Welt beschreiben.

Vielen Dank für dieses Gespräch.

Das Interview führte Manuela Lenzen.



Hans Havlicek bei der Erläuterung eines der vielen Tafelbilder, die in jeder Arbeitssitzung der Kooperationsgruppe entstanden.